

DM de mathématiques n°1

Logique – Corrigé

Exercice-problème 1

On veut déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) + f(f(n)) = 2n \quad (\text{E})$$

- /1 1) On pose la fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n$. Montrer que g vérifie l'équation (E).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$g(n) + g(g(n)) = n + g(n) = n + n = 2n$$

donc g vérifie (E).

- /2 2) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifie (E).

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $f(n) \geq 0$.
Montrons que $f(n) \leq 2n$. Comme $f(f(n)) \geq 0$, on a

$$f(n) = 2n - f(f(n)) \leq 2n$$

Finalement, $f(n) \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

- /1 b) En déduire $f(0)$.

Par la question précédente, on a $f(0) \in \llbracket 0, 2 \times 0 \rrbracket = \{0\}$.
Ainsi, $f(0) = 0$.

(On peut aussi remplacer n par 0 dans l'équation (E) pour arriver au résultat.)

- /3 c) En raisonnant par disjonction de cas, déterminer $f(1)$.

Par la question a), on a $f(1) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket = \{0, 1, 2\}$.

— Si $f(1) = 0$, alors par l'équation (E)

$$\begin{aligned} f(1) + f(f(1)) &= 2 \\ \implies 0 + f(0) &= 2 \\ \implies 0 + 0 &= 2 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $f(1) \neq 0$.

— Si $f(1) = 2$, alors par l'équation (E) on a

$$\begin{aligned} f(1) + f(f(1)) &= 2 \\ \implies 2 + f(2) &= 2 \\ \implies f(2) &= 0 \end{aligned}$$

Or, on a également

$$\begin{aligned} f(2) + f(f(2)) &= 4 \\ \implies 0 + f(0) &= 4 \\ \implies 0 + 0 &= 4 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $f(1) \neq 2$.

Ainsi, on a nécessairement $f(1) = 1$.

- d) Montrer que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (f(m) = f(n)) \implies m = n$$

/2

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(m) = f(n)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} 2n &= f(n) + f(f(n)) \\ &= f(m) + f(f(m)) \\ &= 2m \end{aligned}$$

donc $n = m$.

- e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad f(k) = k$$

En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(n+1) \geq n+1$, puis que $f(n+1) \leq n+1$. Conclure.

/4

Supposons par l'absurde que $f(n+1) < n+1$. Alors si on pose $m = f(n+1)$, comme $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $f(m) = m$ par hypothèse. Ainsi,

$$f(m) = m = f(n+1)$$

Par la question d), cela entraîne que $m = n+1$, ce qui est absurde. Donc $f(n+1) \geq n+1$.

Supposons par l'absurde que $f(n+1) > n+1$. Par la question **a)**, on a donc $f(n+1) \in \llbracket n+2, 2(n+1) \rrbracket$. Or, on a

$$f(n+1) + f(f(n+1)) = 2(n+1)$$

ainsi,

$$f(f(n+1)) = 2(n+1) - f(n+1)$$

Comme $f(n+1) \geq n+2$, cela entraîne que

$$f(f(n+1)) \leq 2(n+1) - (n+2)$$

c'est-à-dire

$$0 \leq f(f(n+1)) \leq n$$

Cela implique qu'il existe $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $f(f(n+1)) = m$. De plus, par hypothèse, $f(m) = m$. Donc

$$f(f(n+1)) = f(m)$$

On en déduit que $f(n+1) = m$ par la question **d)**. Ainsi, $f(n+1) \leq n$. Contradiction car on a supposé que $f(n+1) > n+1$. Finalement, $\boxed{f(n+1) \leq n+1}$.

Comme $n+1 \leq f(n+1) \leq n+1$, cela conduit à $\boxed{f(n+1) = n+1}$.

/2 **f)** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$.

On raisonne par récurrence **forte** sur n . On pose $H_n : f(n) = n$.

— Pour $n = 0$, on a vu que $f(0) = 0$ par la question **b)**, donc H_0 est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $H_0, H_1, \dots, H_n$ sont vraies. Alors, H_{n+1} est vraie également par la question **e)**.

Ainsi, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où le résultat.

/1 **3)** Conclure, en précisant le type de raisonnement utilisé.

On a raisonné par analyse-synthèse. Par l'analyse (questions **a)** à **f)**), la seule fonction susceptible d'être solution de (E) est la

fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$$

Par la synthèse (question **1)**), cette fonction est effectivement solution. Donc la seule solution de (E) est la fonction $g : \boxed{\mathcal{S} = \{g\}}$.

Exercice 2 (facultatif et plus difficile)

En utilisant le fait (admis) que $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

/4 On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, i.e. qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b des entiers.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{a}{b} &\implies \sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b} - \sqrt{5} \\ &\implies \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} - \sqrt{5}\right)^2 \\ &\implies 2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\sqrt{5} + 5 \\ &\implies 2\sqrt{6} + 2\frac{a}{b}\sqrt{5} = \frac{a^2}{b^2} \\ &\implies \sqrt{6} + \frac{a}{b}\sqrt{5} = \frac{a^2}{2b^2} \\ &\implies \left(\sqrt{6} + \frac{a}{b}\sqrt{5}\right)^2 = \frac{a^4}{4b^4} \\ &\implies 6 + 5\frac{a^2}{b^2} + 2\frac{a}{b}\sqrt{30} = \frac{a^4}{4b^4} \end{aligned}$$

On a donc

$$a\sqrt{30} = \frac{b}{2} \left(\frac{a^4}{4b^4} - 6 - 5\frac{a^2}{b^2} \right)$$

Comme $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \neq 0$, on a en particulier $\frac{a}{b} \neq 0$, donc $a \neq 0$. Ainsi :

$$\sqrt{30} = q \quad \text{avec} \quad q = \frac{b}{2a} \left(\frac{a^4}{4b^4} - 6 - 5\frac{a^2}{b^2} \right)$$

Or, q est un rationnel (on peut le réécrire en une fraction d'entiers). Contradiction. D'où le résultat.